9 - Дәріс

Тақырыбы: **Туындылар мен дифференциалдар.**

1. Дербес туындылар. $f(x,y)$ екі айнымалы функциясы берілсін. $f(x,y)$ ***функциясының*** $P(x,y)$ ***нүктесіндегі*** x ***бойынша дербес туындысы*** деп $\Delta_x z$ дербес өсімшесінің Δx өсімшесіне қатынасының $\Delta x \to 0$ $\Delta x \neq 0$ (ұмтылғандағы) шегін (егер ол шек бар болса) айтады да

$$z'_x,\ f'_x(x,y),\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial x}$$

символдарының біреуімен белгілейді:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}.$$

$f(x,y)$ **функциясының** $P(x,y)$ **нүктесіндегі** y **бойынша дербес туындысы** да дәл осылай анықталады және ол

$$z'_y,\ f'_y(x,y),\ \frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial y}$$

символдарының біреуімен белгіленеді:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} \qquad (\Delta y \neq 0)$$

Бұл анықтамадан дербес туындыларды есептеу ережелері бір айнымалы функцияның туындыларын есептеу ережелерімен бірдей екенін көреміз. Әрине, бұл жағдайда дербес туынды айнымалылардың қайсысы бойынша ізделініп отырғаны есте тұру керек, ал қалған айнымалылар тұрақты сан ролін атқарады.

2. Толық дифференциал. $D \subset R^2$ жиынында $z = f(x,y)$ функциясы берілсін және оның $(x,y) \in D$ нүктесінде үзіліссіз дербес туындылары бар болсын. Бұдан

(x,y) нүктесінің қандай да бір маңайында осы дербес туындылар бар болатыны (олар (x,y)(тен басқа нүктелерде үзілісті болса да) шығады. $\Delta x, \Delta y$ өсімшелерін

$|\Delta x| < \delta,\ |\Delta y| < \delta$

шартын қанағаттандыратындай, ал $\delta > 0$ санын $(x+\Delta x,\quad y+\Delta y)$ нүктесі жоғарыдағы көрсетілген аймақтан шығып кетпейтіндей жеткілікті аз етіп алып, осы $\Delta x, \Delta y$ өсімшеге сәйкес келетін f функциясының толық өсімшесін қарастырайық:

$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$

1-теорема. *Егер* $z = f(x,y)$ *функциясының* (x,y) *нүктесінде үзіліссіз дербес туындылары бар болса, онда оның осы нүктедегі шексіз аз* $\Delta x, \Delta y$*-ке сәйкес* Δz *өсімшесін келесі формула түрінде жазуға болады*

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + o(\Delta\rho),\ \Delta\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0 \quad (1)$$

(1)-теңдіктегі дербес туындылар $\Delta x, \Delta y$-ке тәуелді емес. Сондықтан теорема шартынан функция өсімшесін келесі формула түрінде жазуға болатыны шығады:

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\Delta p),\ \Delta\rho \to 0 \qquad (2)$$

Анықтама. *Егер* f *функциясының* (x,y) *нүктесіндегі өсімшесін шексіз аз* $\Delta x, \Delta y$ *үшін (2) теңдік түрінде жазуға болатын болса, онда* f ***функциясы*** (x,y) ***нүктесінде дифференциалданады*** *дейді.*

2-теорема. f *функциясы нүктеде дифференциалдануы үшін, оның осы нүктеде* ***дербес туындыларының болуы қажетті,*** *ал оның осы нүктеде* ***үзіліссіз дербес туындыларының болуы жеткілікті.***

Анықтама. Егер f функциясы (x, y) нүктесінде дифференциалданса, онда оның өсімшесінің осы нүктедегі сызықты бас бөлігі f функциясының толық **дифференциалы** деп аталады, dz немесе df арқылы белгіленеді:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y, \tag{3}$$

$\Delta x, \Delta y$ тәуелсіз айнымалылар өсімшелерін x пен y **тәуелсіз айнымалыларының дифференциалдары** деп атайды да, оларды dx және dy арқылы белгілейді. Онда толық дифференциал келесі түрге ие болады:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \tag{4}$$